Pole Européen de Plasturgie - École Supérieure de Plasturgie
CONCOURS D'ENTRÉE EN 1ère ANNÉE DU CYCLE INGÉNIEURS 1998
SUP MPSI - PCSI - PTSI

Épreuve de Mathématiques
Durée: 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.
Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME I

Partie A

1°)

a) Étudier sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$ les variations de l'application :

$$\varphi : t \mapsto \varphi(t) = \cos t(1+\sin t) - 1$$

(ne pas construire la courbe représentative).

b) Montrer que l'équation : $\varphi(t) = 0$ possède une solution et une seule $t_0 \in]0,\frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\frac{\pi}{4} < t_0 < \frac{\pi}{3}$.

2°) On considère l'équation : $\sqrt{1+x^2} = x^2 - x + 1$.

À l'aide du changement d'inconnue $x = \tan t$, déduire du 1°) que cette équation admet une solution et une seule x_0 dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

Donner un encadrement de x_0 .

Partie B .

On désigne par f une application numérique définie, continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

On suppose que $f(0)=0$.

On appelle g et h les applications numériques définies à partir de f par les expressions :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; g(x)=\frac{x}{1+|f(x)|} \quad \text{et} \quad h(x)=\frac{f(x)}{1+|x|}$$

1°) Montrer que les applications g et h sont dérivables au point $x=0$.

2°) On pose dans cette question : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) Étudier la parité des applications f, g et h. Donner les conséquences sur l'étude de ces applications.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, le signe de g'(x) est le même que celui de $1+f(x)-xf'(x)$, et le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $(1+x)f'(x)-f(x)$.

Étudier les variations des applications f, g et h.

c) Étudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions f, g et h.

Donner l'allure des courbes des applications f, g et h.

Partie C

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$

On se propose de montrer dans cette question que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$

1°)

a) Si C est une fonction constante valant k sur $[0,1]$ ($\forall x \in [0,1] \;\; C(x)=k$) vérifier que :

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n C(x)dx = C(1)=k$$

En déduire qu'on a l'équivalence:

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n\big(f(x)-f(1)\big)dx = 0$$

b) On suppose que f est de classe C^1 sur $[0,1]$

Montrer que $(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)-\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx$

En déduire, à l'aide de l'inégalité de la moyenne, que

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$$

2°) Application :

Soient $(\tilde{f}_n)_{n\in IN}$ une suite de fonction définie par $\tilde{f}_n(x)=\dfrac{(n+1)x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad 0\le x\le 1,$

et $\tilde{f}$ l'application définie sur $[0,1]$ par

$$\begin{cases}\tilde{f}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x), & 0<x<1\\ \tilde{f}(0)=\tilde{f}(1)=0\end{cases}$$

Calculer $\tilde{f}(x)$ pour $x\in[0,1]$ puis donner la valeur de $\int_0^1\tilde{f}(x)dx$.

3°) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Que remarquez-vous ?

4°) Soit $\beta\in\mathbb{R}$ tel que $0<\beta<1$ et g une fonction continue sur $[0,1]$ montrer

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^\beta x^n g(x)dx=0$$

5°) On considère une fonction f continue sur $[0,1]$.
Soit ε un réel strictement positif.

1- Montrer qu'il existe un $\alpha>0$ tel que $0<\alpha<1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|(n+1)\int_{1-\alpha}^1 x^n\big(f(x)-f(1)\big)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

2- Montrer qu'il existe un entier naturel N ($N\in\mathbb{N}$) tel que

$$(\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge N\Rightarrow\left|(n+1)\int_0^{1-\alpha}x^n\big(f(x)-f(1)\big)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2})$$

3- En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$.

Fin du problème I.

PROBLÈME II

E désigne un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps $\mathbb{R}$.

Partie A

1) Soit $N(\gamma)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$ où γ est un réel quelconque.

Montrer que l'endomorphisme de E ayant pour matrice $N(\gamma)$ relativement à une base (i,j,k) de E est une affinité ; préciser ses caractéristiques.

2) Soit $M(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque.

a) Soit h l'endomorphisme de E ayant pour matrice $M(a)$ relativement à la base (i,j,k).

h est-elle bijective ?

Déterminer le rang, le noyau et l'image de $h-id$ (*id* désigne l'identité de *E)*.

b) Montrer que l'ensemble $G=\{M(a)/a\in\mathbb{R}\}$, muni de la multiplication des matrices, est un sous-groupe d'un groupe qu'on précisera.

c) On note m l'application de $\mathbb{R}$ dans G qui au réel a associe la matrice $M(a)$; montrer que m est un morphisme de groupes ; s'agit-il d'un isomorphisme ?

Partie B

Dans cette deuxième partie, P est un plan vectoriel fixé de E, et D une droite vectorielle fixée ; on suppose ***D* contenue dans *P***.

On note $T_{P,D}$ l'ensemble des applications linéaires f de E dans E telles que :

$$\begin{cases}\forall u\in P, f(u)=u\\ \forall u\in E, f(u)-u\in D.\end{cases}$$

Faire une figure illustrant les propriétés ci-dessus.

Les éléments de $T_{P,D}$ sont appelés les transvections de plan P et de droite D.

1) Soit (i,j,k) une base de E telle que $i \in P$ et $j \in D$.

a) Montrer que si f est un élément de $T_{P,D}$, la matrice de f relativement à la base (i,j,k) s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (a étant un réel).

b) Montrer que $T_{P,D}$ muni de la composition des applications est un sous-groupe d'un groupe qu'on précisera.

c) L'application μ de $T_{P,D}$ dans $\mathbb{R}$ qui à f associe le réel a défini ci-dessus est-elle un morphisme de groupes ? Est-elle bijective ?

2) On suppose (seulement pour cette question 2)) que E est muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien orienté ; son produit scalaire est noté $\bullet$.

a) Justifier l'existence d'une base orthonormée directe (i',j',k') de E telle que $i' \in P$ et $j' \in D$; combien existe-t-il de telles bases ?

b) Montrer que si f est un élément de $T_{P,D}$, de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base (i',j',k'), alors $a' = f(k') \bullet j'$. Interpréter géométriquement a' en faisant une figure.

Partie C

Dans cette troisième partie, Q est un plan vectoriel fixé de E.

On note U_Q l'ensemble des applications linéaires g de E dans E telles que $\forall u \in Q,\ g(u) = u$.

On suppose que g est un élément de U_Q.

Soit (i,j,k) une base de E telle que i et $j \in Q$.

a) Montrer que la matrice de g relativement à la base (i,j,k) s'écrit

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \text{ étant des réels.}$$

b) **On suppose $\gamma \neq 1$.**

- Soit x et y des réels, et $k' = xi + yj + k$; montrer que (i,j,k') est une base de E.
- Montrer qu'il est possible de déterminer x et y de façon que la matrice de g relativement à (i,j,k') soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.
- En déduire la nature de g.

c) **On suppose $\gamma = 1$, mais $g \neq id$.**

- Montrer que $\mathrm{Im}(g - id)$ est une droite Δ contenue dans le plan Q.
- Montrer qu'il existe une base (i'',j'',k'') relativement à laquelle la matrice de g est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- En déduire la nature de g.

Fin du problème II.